Électromagnétisme – Chapitre 4

Équations de Maxwell et énergie électromagnétique

I. Formulation de l'électromagnétisme . . . 1
I.1. Forme locale et forme intégrale . . . 1
I.2. Formulaire d'analyse vectorielle . . . 2
II. Équation locale de conservation de la charge . . . 2
II.1. Cas unidimensionnel . . . 2
II.2. Généralisation . . . 3
III. Équations de Maxwell . . . 3
III.1. Équation de Maxwell-Gauss . . . 3
III.2. Équation de Maxwell-Faraday . . . 4
III.3. Équation de Maxwell-Thomson . . . 5
III.4. Équation de Maxwell-Ampère . . . 5
III.5. Récapitulatif . . . 6
III.6. Découplage des champs en régime stationnaire . . . 6
IV. Énergie électromagnétique . . . 7
IV.1. Densité volumique d'énergie électromagnétique . . . 7
IV.2. Vecteur de Poynting . . . 7
IV.3. Bilan d'énergie électromagnétique dans le vide . . . 7

James Clerk Maxwell présenta en 1865 un ensemble d'équations permettant de décrire les phénomènes électriques et magnétiques, ainsi que leurs interactions. Il s'agit d'une synthèse de travaux antérieurs réalisés sur l'électricité et le magnétisme par Gauss, Faraday et Ampère. Il faudra attendre le développement de l'analyse vectorielle, quelques décennies plus tard, pour aboutir à la formulation de quatre équations aux dérivées partielles, qui sont aujourd'hui les postulats de base de l'électromagnétisme.

I. Formulation de l'électromagnétisme

I.1. Forme locale et forme intégrale

Les lois de l'électromagnétisme peuvent être énoncées sous deux formes :

- soit sous forme **locale**, c'est-à-dire en chaque point de l'espace, à l'aide d'une équation aux dérivées partielles ;
- soit sous forme **intégrale**, c'est-à-dire pour un domaine de l'espace (courbe, surface ou volume), à l'aide d'une intégration sur ce domaine.

Pour bien distinguer ces deux formes, nous pouvons prendre l'exemple de la relation liant le champ électrostatique $\vec{E}$ au potentiel électrostatique V :

- sous forme locale, on exprime le champ tel que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

- sous la forme intégrale, on exprime la circulation du champ entre les points A et B telle que :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = V(A) - V(B)$$

or ces deux formulations sont parfaitement équivalentes, car on peut obtenir la formulation intégrale à partir de la formulation locale :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_A^B \left(-\overrightarrow{\text{grad}}\, V\right) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\int_A^B \mathrm{d}V = V(A) - V(B).$$

I.2. Formulaire d'analyse vectorielle

On rappelle les expressions des opérateurs en coordonnées cartésiennes :

- gradient :
$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z$$
- divergence :
$$\text{div}\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
- rotationnel :
$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$
- laplacien scalaire :
$$\Delta f = \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$
- laplacien vectoriel :
$$\begin{aligned}\Delta\vec{A} &= \Delta A_x\,\vec{e}_x + \Delta A_y\,\vec{e}_y + \Delta A_z\,\vec{e}_z \\ &= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\vec{e}_z\end{aligned}$$

On peut également montrer facilement ces propriétés sur la composition d'opérateurs :

- $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right) = \vec{0}$;
- $\text{div}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right) = 0$;
- $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\,\vec{A}\right) - \Delta\vec{A}$.

On rappelle enfin deux théorèmes utiles en électromagnétisme :

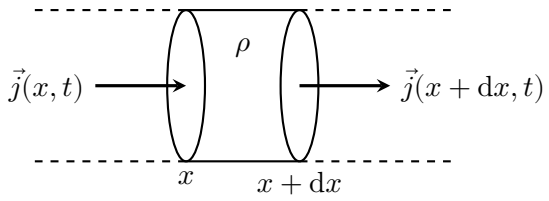
- le **théorème de Stokes** : la circulation d'un champ vectoriel $\vec{A}$ le long d'un contour fermé et orienté C sur lequel s'appuie une surface S peut s'exprimer :
$$\oint_C \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_S \left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$
- le **théorème d'Ostrogradski** : le flux d'un champ vectoriel $\vec{A}$ sortant à travers une surface fermée et orientée S délimitant un volume V peut s'exprimer :
$$\oiint_S \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \left(\text{div}\,\vec{A}\right)\mathrm{d}V$$

II. Équation locale de conservation de la charge

II.1. Cas unidimensionnel

On considère un matériau conducteur présentant une densité volumique de charges $\rho(x,t)$ et un vecteur densité volumique de courants $\vec{j}(x,t)$, dont on suppose qu'ils ne dépendent que de la coordonnée x et du temps t.

Afin d'établir l'équation qui relie les variations locales de $\rho(x,t)$ et de $\vec{j}(x,t)$, nous allons réaliser un bilan de charges à une tranche de ce matériau comprise entre les abscisses x et $x+\mathrm{d}x$ de surface S entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$.



En exprimant le vecteur densité volumique de courants de la forme $\vec{j}(x,t) = j(x,t)\,\vec{e}_x$, on peut exprimer pour cette tranche :

- la charge entrante en x entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$:

$$\delta Q_{\text{entrante}} = I(x,t)\,\mathrm{d}t = \iint_{\text{S}} [j(x,t)\,\vec{e}_x] \cdot (\mathrm{d}S\,\vec{e}_x)\,\mathrm{d}t = j(x,t)\,S\,\mathrm{d}t$$

- la charge sortante en $x + \mathrm{d}x$ entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$:

$$\delta Q_{\text{sortante}} = I(x+\mathrm{d}x,t)\,\mathrm{d}t = \iint_{\text{S}} [j(x+\mathrm{d}x,t)\,\vec{e}_x] \cdot (\mathrm{d}S\,\vec{e}_x)\,\mathrm{d}t = j(x+\mathrm{d}x,t)\,S\,\mathrm{d}t \approx \left[j(x,t) + \frac{\partial j}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right] S\,\mathrm{d}t$$

d'où on en déduit la variation de la charge de cette tranche :

$$\mathrm{d}Q = \delta Q_{\text{entrante}} - \delta Q_{\text{sortante}} = j(x,t)\,S\,\mathrm{d}t - \left[j(x,t) + \frac{\partial j}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right] S\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial j}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,S\,\mathrm{d}t.$$

On peut également exprimer la variation de la charge de cette tranche entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ telle que :

$$\mathrm{d}Q = Q(t+\mathrm{d}t) - Q(t) = \rho(x,t+\mathrm{d}t)\,S\,\mathrm{d}x - \rho(x,t)\,S\,\mathrm{d}x \approx \left[\rho(x,t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}t\right] S\,\mathrm{d}x - \rho(x,t)\,S\,\mathrm{d}x = \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,S\,\mathrm{d}x$$

soit en égalisant les deux expressions :

$$-\frac{\partial j}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,S\,\mathrm{d}t = \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,S\,\mathrm{d}x$$

d'où en simplifiant :

$$-\frac{\partial j}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

et on aboutit finalement à l'équation locale de conservation de la charge dans le cas unidimensionnel :

II.2. Généralisation

En généralisant le résultat précédent aux trois dimensions de l'espace à l'aide de l'opérateur divergence, on aboutit alors à l'**équation locale de conservation de la charge** :

III. Équations de Maxwell

III.1. Équation de Maxwell-Gauss

L'**équation de Maxwell-Gauss** s'écrit :

avec ρ la densité volumique de charges.

Application :

Déterminons la densité volumique de charges $\rho(M)$ en tout point de l'espace pour un milieu présentant un champ électrique de la forme :

$$\overrightarrow{E} = \begin{cases} -E_0\,\vec{e}_x & \text{pour } x < -a \\ \dfrac{E_0\,x}{a}\,\vec{e}_x & \text{pour } -a \leqslant x \leqslant a \\ E_0\,\vec{e}_x & \text{pour } x > a \end{cases}$$

Pour obtenir une forme intégrale de cette équation de Maxwell, on l'intègre sur un volume V :

$$\iiint_V \operatorname{div}\overrightarrow{E}\,\mathrm{d}V = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,\mathrm{d}V$$

puis on exprime d'une part à l'aide du théorème d'Ostrogradski :

$$\iiint_V \operatorname{div}\overrightarrow{E}\,\mathrm{d}V = \oiint_S \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

avec S la surface délimitant ce volume, et d'autre part :

$$\iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

avec Q_{int} la charge électrique contenue à l'intérieur de ce volume, on retrouve alors le **théorème de Gauss** :

III.2. Équation de Maxwell-Faraday

L'**équation de Maxwell-Faraday** s'écrit :

Pour obtenir une forme intégrale de cette équation de Maxwell, on l'intègre sur une surface S :

$$\iint_S \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_S -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

puis on exprime d'une part à l'aide du théorème de Stokes :

$$\iint_S \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \oint_C \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$$

avec C le contour sur lequel s'appuie cette surface, et on rappelle que la circulation du champ $\overrightarrow{E}$ correspond à une différence de potentiel, c'est-à-dire à une force électromotrice e, soit :

$$\oint_C \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = e$$

et d'autre part :

$$\iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

avec Φ le flux du champ magnétique à travers cette surface, on retrouve alors la **loi de Faraday** :

III.3. Équation de Maxwell-Thomson

L'**équation de Maxwell-Thomson**, aussi appelée équation de Maxwell-flux, s'écrit :

Pour obtenir une forme intégrale de cette équation de Maxwell, on l'intègre sur un volume V :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{B} \, \mathrm{d}V = 0$$

puis on exprime à l'aide du théorème d'Ostrogradski :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{B} \, \mathrm{d}V = \oiint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

avec S la surface délimitant ce volume, on retrouve alors que le flux du champ magnétique est **conservatif** :

III.4. Équation de Maxwell-Ampère

L'**équation de Maxwell-Ampère** s'écrit :

avec $\vec{j}$ le vecteur densité volumique de courants.

Pour obtenir une forme intégrale de cette équation de Maxwell, on l'intègre sur une surface S :

$$\iint_S \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \mu_0 \, \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_S \varepsilon_0 \, \mu_0 \, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

puis on exprime d'une part à l'aide du théorème de Stokes :

$$\iint_S \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

avec C le contour sur lequel s'appuie cette surface, et d'autre part :

$$\iint_S \mu_0 \, \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_S \varepsilon_0 \, \mu_0 \, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \varepsilon_0 \, \mu_0 \, \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \mu_0 \, I_{\text{enl}} + \varepsilon_0 \, \mu_0 \, \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

avec I_{enl} l'intensité qui traverse cette surface, on obtient alors le **théorème d'Ampère généralisé** :

En régime stationnaire, l'équation précédente se simplifie et donne :

$$\oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 \, I_{\text{enl}}$$

on retrouve alors le **théorème d'Ampère** de la magnétostatique.

III.5. Récapitulatif

Forme locale	**Forme intégrale**
Équation de Maxwell-Gauss : $$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$	Théorème de Gauss : $$\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$
Équation de Maxwell-Faraday : $$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$	Loi de Faraday : $$e = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$
Équation de Maxwell-Thomson : $$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$	Conservation du flux : $$\oiint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0$$
Équation de Maxwell-Ampère : $$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$	Théorème d'Ampère généralisé : $$\oint_C \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0\,I_{\text{enl}} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

Application :

Retrouvons l'équation locale de conservation de la charge en appliquant l'opérateur divergence à l'équation de Maxwell-Ampère, puis en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss.

III.6. Découplage des champs en régime stationnaire

Dans le cas général, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne sont pas indépendants l'un de l'autre, puisqu'ils sont reliés entre eux par les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère.

En régime stationnaire, lorsque les champs sont statiques et n'évoluent pas dans le temps, les équations de Maxwell se simplifient et donnent :

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \vec{0} \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}.$$

On remarque alors que chaque équation ne fait intervenir que le champ $\vec{E}$ ou le champ $\vec{B}$, ils sont donc indépendants l'un de l'autre, et on dit qu'ils sont **découplés**.

IV. Énergie électromagnétique

IV.1. Densité volumique d'énergie électromagnétique

On admet que la **densité volumique d'énergie électromagnétique** d'un espace vide où règne un champ électromagnétique est :

elle s'exprime en $\mathrm{J{\cdot}m^{-3}}$.

Application :

Retrouvons l'expression de l'énergie magnétique $\mathcal{E}_\mathrm{m}$ emmagasinée dans un solénoïde de longueur ℓ, de section S et constitué de N spires parcourues par une intensité i.
On rappelle que l'inductance propre d'un tel solénoïde est :

$$L = \frac{\mu_0\, N^2\, S}{\ell}.$$

IV.2. Vecteur de Poynting

On définit le **vecteur de Poynting** d'un champ électromagnétique :

il s'exprime en $\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$.

On admet que la **puissance rayonnée** par un champ électromagnétique à travers une surface S, c'est-à-dire la quantité d'énergie émise par unité de temps à travers cette surface, correspond au flux du vecteur de Poynting, soit :

elle s'exprime en Watt (W).

IV.3. Bilan d'énergie électromagnétique dans le vide

On considère un volume V d'espace vide, délimité par une surface S, où règne un champ électromagnétique. On note $U(t)$ l'énergie électromagnétique contenue dans ce volume. Nous allons réaliser un bilan d'énergie à ce volume entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.

La puissance rayonnée à travers la surface S par le champ électromagnétique peut s'exprimer à l'aide du théorème d'Ostrogradski :

$$P_{\text{ray}} = \oiint_S \vec{R} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{R} \, \mathrm{d}V$$

or le rayonnement faire perdre de l'énergie à ce volume, on peut alors exprimer la variation de son énergie électromagnétique entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}U = -P_{\text{ray}} \, \mathrm{d}t = - \iiint_V \operatorname{div} \vec{R} \, \mathrm{d}V \, \mathrm{d}t.$$

On peut également exprimer la variation de l'énergie électromagnétique de ce volume entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ telle que :

$$\mathrm{d}U = U(t+\mathrm{d}t) - U(t) = \iiint_V u(t+\mathrm{d}t) \, \mathrm{d}V - \iiint_V u(t) \, \mathrm{d}V \approx \iiint_V \left[u(t) + \frac{\partial u}{\partial t} \, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}V - \iiint_V u(t) \, \mathrm{d}V = \iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}V$$

soit en égalisant les deux expressions :

$$\iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}V = - \iiint_V \operatorname{div} \vec{R} \, \mathrm{d}V \, \mathrm{d}t$$

et comme cette relation est valable quel que soit le volume V considéré, on aboutit finalement à l'**équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique dans le vide** :

Il est important de préciser que si cette équation est vérifiée dans le vide, ce n'est pas forcément le cas en présence de charges ou de courants.

Application :

Retrouvons l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique dans le vide en exprimant le produit scalaire $\vec{E} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}$ à l'aide des équations de Maxwell, et en utilisant la relation d'analyse vectorielle suivante :

$$\vec{a} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{b} = \vec{b} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{a} - \operatorname{div} \left(\vec{a} \wedge \vec{b} \right).$$